



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Guía Certamen 1 de Introducción al Cálculo (MAT-070)

1. Determine el valor de verdad de las proposiciones p , q y r , si se sabe que la siguiente proposición es verdadera.

$$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r)] \wedge \overline{[p \Rightarrow (q \wedge r)]}$$

2. Determine mediante propiedades, si la siguiente proposición es una tautología, contradicción o contingencia.

$$[(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)] \Rightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $(\exists x \in A)(\exists y \in A)(x + y \in A \vee x - y \geq 1)$.

b) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y \in A \vee x - y \geq 1)$.

4. Sean $A = \{0, 1, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2, 4\}$

- a) Determine el valor de verdad de la proposición

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)((x + y \geq 4) \vee (xy < 1))$$

- b) Obtenga una expresión que corresponda a la negación de la proposición anterior.

5. Demostrar que:

a) Para $n \in \mathbb{Z}$. Si $\frac{3n^2 + 8n + 4}{2}$ es impar (par), entonces n es impar (par).

b) Para $n \in \mathbb{Z}$. Si n es par, entonces $n^2 + n + 1$ es impar.

c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b > 0$, entonces $12 \leq \frac{9a^2}{b^3} + \frac{4b^3}{a^2}$

6. Dados A y B no vacíos tal que $|A| = 17$, $|A - B| = 5$ y $|A \cup B| = 25$. Calcule $|(A - B) \cup (B - A)|$.

7. Un club consta de 78 personas, de las cuales 50 juegan al fútbol, 32 al baloncesto y 23 al voleibol. Seis figuran en los tres deportes y 10 no practican deporte alguno. ¿Cuántas personas practican sólo un deporte? ¿cuántas practican sólo dos deportes? ¿Cuántas practican al menos dos deportes? ¿Cuántas practican a lo sumo dos deportes?

8. Se seleccionan 100 estudiantes al azar con el objetivo de recopilar información respecto de la actividad física que realizan. Se designó como F al conjunto de estudiantes que indicó realizar actividad de fuerza y como C al conjunto de estudiantes que afirmó realizar actividad cardiovascular, y se obtuvieron los siguientes datos:

- 13 estudiantes no realizan actividad cardiovascular
- 35 estudiantes realizan actividad cardiovascular pero no actividad de fuerza
- todas las personas que hacen actividad de fuerza también hacen actividad cardiovascular

- a) Exprese los datos del problema en notación de cardinalidad.
- b) Dibuje el diagrama de Venn que representa el problema.
- c) Usando propiedades de cardinalidad, determine la cantidad de estudiantes que realizan actividad de fuerza.
- d) ¿Qué significado tiene $F^c \setminus C$, de acuerdo con el contexto del enunciado? Determine la cardinalidad de este conjunto.

9. Considere los conjuntos A , B , C , definidos por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| \geq 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{|x-1|} > 1\right\} \text{ y}$$

$$C = \{[A \cap (A^c \cup B^c)] \cap [A^c \cup (A \cap B)]\} \cup [(A - B^c) \cup (B - A)]$$

Defina cada conjunto mediante intervalos reales.

10. Considere los conjuntos A y B . Utilizando propiedades, simplifique

$$\{(A \cup B) \cap [(A^c \cap B) \cup (A \cap B)]\} \cup (A^c \cap B^c) \cup A$$

11. Resolver

$$|x - 8| - |x + 3| - x \geq 0$$

12. Resolver la inecuación

$$\frac{(x-3)(x+1)(-x^2+x-3)}{|x|(x-2)} \geq 0$$

13. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} : |\frac{x+3}{7}| < \frac{5}{14}\}$, $B = [-5, 7]$ y $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x^2-2x+1)(x^2+x-6)}{(x-3)^2(x^2-x+6)} > 0\right\}$.

Determine:

- a) $A \cap B$
- b) $B \setminus A$
- c) $(B \cup C) \setminus A$

14. Resolver

$$|2x - 5|(x^2 - 5x + 6) < 0$$

15. Resolver la inecuación

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} (x + 1) (x^2 + 3x - 4)}{(x^2 + 2x + 4)} \geq 0$$

16. Considere la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1 - \sqrt{3 - x}$

- a) Determine dominio A de la función g .
- b) Determine el recorrido de g .
- c) Resuelva la desigualdad $g(x) < 2$, $x \in A$.

17. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x) = 5 - |4 - 2x|,$$

- a) Utilizando transformaciones, construya la gráfica de f a partir de la gráfica de la función $g(x) = |x|$.
 - b) Usando la gráfica de la función determine el recorrido de f .
 - c) Determine el conjunto imagen de los $x \in [-1, 6]$.
18. Considere la función f dada por

$$f(x) = \left| \frac{2x - 5}{x - 2} \right|.$$

- a) Determine $\text{Dom}(f)$.
 - b) Utilizando transformaciones, construya la gráfica de f a partir de la gráfica de la función.
 - c) Usando la gráfica de la función determine el recorrido de f .
19. Considere:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x + 1} + 3 \end{aligned}$$

- a) Trace la gráfica de f a partir de la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$.
 - b) Determine el recorrido de f .
20. Considere:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x + 5)^2 - 10 \end{aligned}$$

- a) Trace la gráfica de h a partir de la gráfica de $y = x^2$.
- b) Determine el recorrido de h usando el gráfico.
- c) Use el gráfico para resolver $h(x) > 1$.