

Cálculo Diferencial Guía 2: Funciones II

Resultados de Aprendizaje

- Determinar el dominio, recorrido y el gráfico de funciones cuadráticas.
- Reconocer y utilizar distintos tipos de funciones y sus propiedades.
- Clasificar o analizar propiedades cualitativas de funciones de forma algebraica y gráfica.

Ejercicios

1. Un fabricante de radios puede construir radios a un costo de 2 dolares por unidad. La radios se venden a 5 dolares cada una. A este precio, los consumidores compran 4000 radios por mes. El fabricante planea aumentar el precio de las radios y estima que por cada incremento de 1 dolar en el precio, se venden 400 radios menos por mes. Expresa la utilidad mensual del fabricante como función del precio de la venta de radios.
2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = x^2 + x + 1$
 - a) Determine el recorrido de f
 - b) Represente graficamente f
 - c) Determine intervalos donde f es creciente.
 - d) ¿Es f una función par?
3. Determine si existe una función f cuadrática donde la imagen del 0 es 6, $f(-3) = 0$ y $f(-2) = 0$. Representela gráficamente y determine si es única.
4. Un malabarista lanza hacia arriba tres pelotas, cada una de ellas se desplaza siguiendo una trayectoria que se modela por medio de la función cuadrática definida por: $f(t) = 100 + 96t - 12t^2$ donde $f(t)$ indica la altura (en centímetros) alcanzada por las pelotas al cabo de t segundos de transcurrido el lanzamiento.
 - a) ¿Cuánto tiempo tarda una pelota en alcanzar su altura máxima?
 - b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza cada pelota?
 - c) ¿Qué altura alcanza una pelota transcurridos dos y seis segundos desde su lanzamiento?
 - d) ¿Cuál es el tiempo de duración del vuelo de una pelota?
5. Un agricultor debe cercar en forma rectangular un pedazo de un potrero. Para ello compró 4.000 metros de alambre de púas y los quiere utilizar en su totalidad. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?

6. El rendimiento de combustible de un automóvil se obtiene de acuerdo a la velocidad con la que se desplaza, si x es la velocidad medida en kilómetros por hora (km/h), el rendimiento está dado por la función R definida por: $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x$ con $0 < x < 120$.

a) ¿A qué velocidad se obtiene el máximo rendimiento?

b) ¿Cuál es el máximo rendimiento?

7. a) Grafique la función real $f(x) = x^2$.

b) Si $g(x) = f(x) + c$ donde c es una constante, ¿cómo se relacionan las gráficas de f y g ?

c) Si $g(x) = -f(x)$, ¿cómo se relacionan las gráficas de f y g ?

d) Si $g(x) = f(x - c)$, ¿cómo se relacionan las gráficas de f y g ?

8. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 3x + 1$$

Estudie la paridad de cada una de las funciones y represéntelas gráficamente.

9. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x+4} + 1$.

a) Grafique la función f y determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$.

b) Represente gráficamente g y determine si es creciente.

10. Sean f y g funciones reales definidas por: $f(x) = |x|$ y $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

a) Calcule $(f+g)(3)$, $(fg)(3)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$.

b) Determine las funciones $f+g$, fg , $\frac{f}{g}$ y trace sus gráficas.

Respuestas

1. Sea z el precio de venta de una radio, $U(z) = -400(z - 15)(z - 2)$ con $z \in [0, 15]$.
2.
 - a) $Rec(f) = \left[\frac{3}{4}, +\infty \right[$.
 - b) Identificar los elementos principales de la función cuadrática para graficarla.
 - c) $\left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$.
 - d) f no es par.
3. Es única y es $f(x) = x^2 + 5x + 6$.
4.
 - a) 4 segundos.
 - b) 292 centímetros.
 - c) $f(2) = 244$, $f(6) = 244$.
 - d) 9 segundos.
5. Las dimensiones son 1000 x 1000.
6.
 - a) $x = 7$.
 - b) 12,25.
7.
 - a) Graficar
 - b) La gráfica de g es una translación vertical de la gráfica de f . Si $c > 0$ la gráfica de g se obtiene a partir de la gráfica de f desplazandola hacia arriba c unidades y si $c < 0$ desplazándola hacia abajo $|c|$ unidades.
 - c) La gráfica de g es una reflexión de la gráfica de f respecto al eje x .
 - d) La gráfica de g es una translación horizontal de la gráfica de f . Si $c > 0$ la gráfica de g se obtiene a partir de la gráfica de f desplazandola hacia la derecha c unidades y si $c < 0$ desplazándola hacia la izquierda $|c|$ unidades.
8. $f(-3) = 9$ y $f(3) = \sqrt{3}$, por lo que f no es par ya que $f(-3) \neq f(3)$ y tampoco es impar puesto que $f(-3) \neq -f(3)$.
 $g(2) = 7$ y $g(-2) = -5$, como $g(-2) \neq g(2)$ y $g(-2) \neq -g(2)$ se tiene que g no es par ni es impar.
9.
 - a) $] -\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.
 - b) g es creciente.
10.
 - a) $(f + g)(3) = 7$, $(fg)(3) = 12$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{3}{4}$.
 - b) $Dom(f + g) = Dom(fg) = \mathbb{R}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}, (fg)(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \\ -x^3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad y$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$